数学Ⅱ・数学B

問　題	選 択 方 法
第1問	必　　答
第2問	必　　答
第3問	いずれか2問を選択し，解答しなさい。
第4問	
第5問	

数学Ⅱ・数学B （注）この科目には，選択問題があります。（15ページ参照。）

第１問 （必答問題）（配点　30）

〔1〕 連立方程式

$$\begin{cases} \cos 2\alpha + \cos 2\beta = \dfrac{4}{15} & \cdots\cdots ① \\ \cos\alpha\cos\beta = -\dfrac{2\sqrt{15}}{15} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を考える。ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ であり，$\alpha < \beta$ かつ

$$|\cos\alpha| \geqq |\cos\beta| \quad \cdots\cdots ③$$

とする。このとき，$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ の値を求めよう。

2 倍角の公式を用いると，① から

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$$

が得られる。また，② から，$\cos^2\alpha\cos^2\beta = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{15}$ である。

（数学Ⅱ・数学B第１問は次ページに続く。）

したがって，条件 ③ を用いると

$$\cos^2\alpha = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}, \quad \cos^2\beta = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。よって，② と条件 $0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$，$\alpha < \beta$ から

$$\cos\alpha = \frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}, \quad \cos\beta = \frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

（数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。）

〔2〕 座標平面上に点$\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$をとり，関数$y=\log_2 x$のグラフ上に2点$\mathrm{B}(p,\ \log_2 p)$，$\mathrm{C}(q,\ \log_2 q)$をとる。線分ABを1：2に内分する点がCであるとき，p，qの値を求めよう。

真数の条件により，$p>\boxed{\text{タ}}$，$q>\boxed{\text{タ}}$である。ただし，対数$\log_a b$に対し，aを底といい，bを真数という。

線分ABを1：2に内分する点の座標は，pを用いて

$$\left(\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}p,\quad \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\log_2 p+\boxed{\text{ナ}}\right)$$

と表される。これがCの座標と一致するので

$$\begin{cases} \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}p=q & \cdots\cdots\cdots\cdots\ ④ \\ \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\log_2 p+\boxed{\text{ナ}}=\log_2 q & \cdots\cdots\cdots\cdots\ ⑤ \end{cases}$$

が成り立つ。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

⑤は

$$p = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} q^{\boxed{\text{ネ}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

と変形できる。④と⑥を連立させた方程式を解いて，$p > \boxed{\text{タ}}$，$q > \boxed{\text{タ}}$ に注意すると

$$p = \boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}, \quad q = \boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}$$

である。

また，Cの y 座標 $\log_2\left(\boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}\right)$ の値を，小数第2位を四捨五入して小数第1位まで求めると，$\boxed{\text{ヘ}}$ である。$\boxed{\text{ヘ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～ⓑのうちから一つ選べ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

⓪ 0.3	① 0.6	② 0.9	③ 1.3	④ 1.6	⑤ 1.9
⑥ 2.3	⑦ 2.6	⑧ 2.9	⑨ 3.3	ⓐ 3.6	ⓑ 3.9

数学Ⅱ・数学B

第2問 (必答問題) (配点 30)

Oを原点とする座標平面上の放物線 $y = x^2 + 1$ を C とし，点 $(a,\ 2a)$ をPとする。

(1) 点Pを通り，放物線 C に接する直線の方程式を求めよう。

C 上の点 $(t,\ t^2 + 1)$ における接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ア}}\,tx - t^2 + \boxed{\text{イ}}$$

である。この直線がPを通るとすると，t は方程式

$$t^2 - \boxed{\text{ウ}}\,at + \boxed{\text{エ}}\,a - \boxed{\text{オ}} = 0$$

を満たすから，$t = \boxed{\text{カ}}\,a - \boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ である。よって，$a \neq \boxed{\text{ケ}}$ のとき，Pを通る C の接線は2本あり，それらの方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{コ}}\,a - \boxed{\text{サ}}\right)x - \boxed{\text{シ}}\,a^2 + \boxed{\text{ス}}\,a \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

と

$$y = \boxed{\text{セ}}\,x$$

である。

(2) (1)の方程式①で表される直線を ℓ とする。ℓ と y 軸との交点を $\mathrm{R}(0,\ r)$ とすると，$r = -\boxed{\text{シ}}\,a^2 + \boxed{\text{ス}}\,a$ である。$r > 0$ となるのは，$\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のときであり，このとき，三角形OPRの面積 S は

$$S = \boxed{\text{チ}}\left(a^{\boxed{\text{ツ}}} - a^{\boxed{\text{テ}}}\right)$$

となる。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

$\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のとき，S の増減を調べると，S は $a = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$

で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ をとることがわかる。

(3) $\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のとき，放物線 C と(2)の直線 ℓ および2直線 $x = 0$，$x = a$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}a^3 - \boxed{\text{ヒ}}\,a^2 + \boxed{\text{フ}}$$

である。$\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \leqq a < \boxed{\text{タ}}$ の範囲において，T は $\boxed{\text{ヘ}}$。$\boxed{\text{ヘ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 減少する
① 極小値をとるが，極大値はとらない
② 増加する
③ 極大値をとるが，極小値はとらない
④ 一定である
⑤ 極小値と極大値の両方をとる

第3問 （選択問題）（配点　20）

以下において考察する数列の項は，すべて実数であるとする。

(1)　等比数列$\{s_n\}$の初項が1，公比が2であるとき

$$s_1s_2s_3 = \boxed{\text{ア}}, \quad s_1 + s_2 + s_3 = \boxed{\text{イ}}$$

である。

(2)　$\{s_n\}$を初項x，公比rの等比数列とする。a，bを実数(ただし$a \neq 0$)とし，$\{s_n\}$の最初の3項が

$$s_1s_2s_3 = a^3 \quad \cdots\cdots ①$$

$$s_1 + s_2 + s_3 = b \quad \cdots\cdots ②$$

を満たすとする。このとき

$$xr = \boxed{\text{ウ}} \quad \cdots\cdots ③$$

である。さらに，②，③を用いてr，a，bの満たす関係式を求めると

$$\boxed{\text{エ}}\,r^2 + \left(\boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}\right)r + \boxed{\text{キ}} = 0 \quad \cdots\cdots ④$$

を得る。④を満たす実数rが存在するので

$$\boxed{\text{ク}}\,a^2 + \boxed{\text{ケ}}\,ab - b^2 \leqq 0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

である。

逆に，a，bが⑤を満たすとき，③，④を用いてr，xの値を求めることができる。

(数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。)

(3)　$a = 64$, $b = 336$ のとき，(2)の条件 ①，② を満たし，公比が1より大きい等比数列 $\{s_n\}$ を考える。③，④ を用いて $\{s_n\}$ の公比 r と初項 x を求めると，
$r = \boxed{コ}$，$x = \boxed{サシ}$ である。

$\{s_n\}$ を用いて，数列 $\{t_n\}$ を

$$t_n = s_n \log_{\boxed{コ}} s_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定める。このとき，$\{t_n\}$ の一般項は $t_n = \left(n + \boxed{ス}\right) \cdot \boxed{コ}^{\,n + \boxed{セ}}$ である。$\{t_n\}$ の初項から第 n 項までの和 U_n は，$U_n - \boxed{コ}\,U_n$ を計算することにより

$$U_n = \frac{\boxed{ソ}\,n + \boxed{タ}}{\boxed{チ}} \cdot \boxed{コ}^{\,n + \boxed{ツ}} - \frac{\boxed{テト}}{\boxed{ナ}}$$

であることがわかる。

第4問　（選択問題）（配点　20）

座標平面上に点A(2，0)をとり，原点Oを中心とする半径が2の円周上に点B，C，D，E，Fを，点A，B，C，D，E，Fが順に正六角形の頂点となるようにとる。ただし，Bは第1象限にあるとする。

(1)　点Bの座標は$\left(\boxed{\text{ア}},\ \sqrt{\boxed{\text{イ}}}\right)$，点Dの座標は$\left(-\boxed{\text{ウ}},\ 0\right)$である。

(2)　線分BDの中点をMとし，直線AMと直線CDの交点をNとする。$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$を求めよう。

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$は実数$r$，$s$を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+r\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{DC}}$と2通りに表すことができる。ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\left(-\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\left(\boxed{\text{ク}},\ \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

であるから

$$r=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}},\quad s=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。よって

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left(-\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}},\ \frac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}\right)$$

である。

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

(3) 線分 BF 上に点 P をとり，その y 座標を a とする。点 P から直線 CE に引いた垂線と，点 C から直線 EP に引いた垂線との交点を H とする。

$\overrightarrow{\mathrm{EP}}$ が

$$\overrightarrow{\mathrm{EP}} = \left(\boxed{\text{テ}},\quad \boxed{\text{ト}} + \sqrt{\boxed{\text{ナ}}}\right)$$

と表せることにより，H の座標を a を用いて表すと

$$\left(\frac{\boxed{\text{ニ}}\,a^{\boxed{\text{ヌ}}} + \boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}},\quad \boxed{\text{ハ}}\right)$$

である。

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のなす角を θ とする。$\cos\theta = \dfrac{12}{13}$ のとき，a の値は

$$a = \pm\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}}$$

である。

第5問 （選択問題）（配点　20）

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて29ページの正規分布表を用いてもよい。

(1)　1回の試行において，事象 A の起こる確率が p，起こらない確率が $1-p$ であるとする。この試行を n 回繰り返すとき，事象 A の起こる回数を W とする。確率変数 W の平均（期待値）m が $\dfrac{1216}{27}$，標準偏差 σ が $\dfrac{152}{27}$ であるとき，

$n = \boxed{\text{アイウ}}$，$p = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

(2) (1)の反復試行において，W が 38 以上となる確率の近似値を求めよう。

いま

$$P(W \geqq 38) = P\left(\frac{W-m}{\sigma} \geqq -\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}\right)$$

と変形できる。ここで，$Z = \dfrac{W-m}{\sigma}$ とおき，W の分布を正規分布で近似すると，正規分布表から確率の近似値は次のように求められる。

$$P\left(Z \geqq -\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}\right) = 0.\boxed{\text{コサ}}$$

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

(3) 連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $s \leqq x \leqq t$ で，確率密度関数が $f(x)$ のとき，X の平均 $E(X)$ は次の式で与えられる。

$$E(X)=\int_s^t xf(x)\,dx$$

a を正の実数とする。連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $-a \leqq x \leqq 2a$ で，確率密度関数が

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3a^2}(x+a) & (-a \leqq x \leqq 0 \text{ のとき})\\[2ex] \dfrac{1}{3a^2}(2a-x) & (0 \leqq x \leqq 2a \text{ のとき})\end{cases}$$

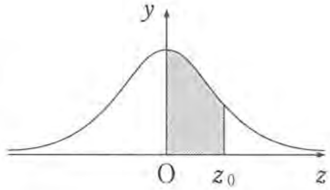
であるとする。このとき，$a \leqq X \leqq \dfrac{3}{2}a$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

また，X の平均は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。さらに，$Y=2X+7$ とおくと，Y の平均は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}+\boxed{\text{テ}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990